

## 分散分析と海岸生態学 (1)

大垣俊一

分散分析 (ANOVA, analysis of variance) は、標本群内の分散を用いて群間の平均値の差を検出する統計手法で、有名な t 検定はその最も単純なスタイルである。これは、私の印象では 1980 年代半ば以降、海岸生態の論文で多く見られるようになり、90 年代に入ってから、くり返しを伴う多元配置によって要因間の相互作用を検出する手法なども普通に行われている。私自身は複雑な形の ANOVA を自分の研究に使ったことはないが、それでも今回それを取り上げるのは、一応この手法の枠組みを理解しておかないと論文の理解や評価に差し支えるので、この機会に整理しておきたいということが一つ。さらに、ANOVA が潮間帯生態学の中心的手法と位置づけられつつある (Underwood, 1997) 昨今の風潮に鑑み、この方法が本当に海岸の環境に適したものであるかどうかを、理論の枠組みに立ち入って検討してみたいというのが、今一つの動機である。

以上の目的に従って、本稿の構成は、以下のように前半と後半に二分する。第一部では、分散分析のいくつかの手法を、それぞれに対応するノンパラメトリクスの方法も含めて概観する。ANOVA については数多くの解説書が出ているので方法の細部はそれらに譲り、あとの議論につながる点に注意を払いながら、この手法の依って立つ考え方を探るように努めたい。具体例や用語の説明に当っては、海岸研究の事例を採用するようにした。第二部では ANOVA の適用条件と、実際に海岸研究に用いた場合に生ずる可能性のある問題点について論じる。私自身は、分散分析の特に複雑なタイプは、実験室内で厳密に条件をコントロールできるような場合ならともかく、岩礁潮間帯のような複雑な環境に適用することには直観的な違和感を持っているが、それを ANOVA の理論に沿って考察してみたい。

なお、個々の手法の検定手順については、石居 (1975)、Sokal & Rohlf (1981)、市原 (1990)、Underwood (1997)、粕谷 (1997)、Zar (1999) を参照した。

### I. 分散分析の種類と手順

分散分析には、比較する要因が一次的に配列している一元配置型 (1-way ANOVA) と、二次元ないしそれ以上の次元に配列している多元配置型 (2-way, 3-way, … ANOVA, multiway, factorial) がある。一元配置とは、具体例を出せば、A, B, C 点にコドラートを置いて何かの種の複数個体の体長を測ったデータがあったとして、地点ごとの平均体長の差を調べようとするようなケースである (表 1、左)。

	A	B	C		A	B	C
標 本 値	---	---	---	X	---	---	---
	---	---	---	Y	---	---	---
	---	---	---	Z	---	---	---
	---	---	---		---	---	---
	---	---	---		---	---	---

表 1. 一元配置（左）と二元配置（右）

A, B, C… はそれぞれ、地点、時間、生物種、あるいは実験の場合には何らかの操作、条件であることもある（「要因」、「処理」などと呼ばれる）。多元配置の例として二元配置を表 1、右に示したが、こちらの場合には要因の組合せが二次元になっており、A, B, C, … と、X, Y, Z, … の両方の差を調べることができる。三元以上の配置も、要因列がふえるだけで基本的には二元と同じである。

要因の選択のしかたには、固定型 (Model I) と無作為型 (Model II) がある。表 1 左の例でいうと、A, B, C 地点がこの場所でなければならない、といった設定で選択されていれば固定型の変数となり、地点間で示された差は、そのまま 3 地点間の差を示す。しかし A, B, C 点が、ある区域からのランダムサンプリングになっていれば、この場合の検定は、その区域内でサイズが一樣と考えてよいかどうかといった意味を持つことになる。

一般的な統計手法の例にもれず、ANOVA の場合も、parametrics に対応する nonparametrics の手法が考案されている。parametrics は、母集団の正規分布性と群間の等分散が仮定できる場合に用いられ、長い歴史の間に様々なタイプの実験や調査に適用されて、方法論的によく整備されている (粕谷 1998)。nonparametrics は、母集団の正規分布や群間等分散が仮定できない時に使われ、適用範囲は parametrics より広いということになっているが (Sokal & Rohlf 1981)、方法論的に未整備で、通常のテキスト類では、くり返しのない二元配置までの方法しか解説されていない。

以下具体的手法について述べるが、一元配置の 2 標本 (2 群、2 要因) の検定である t 検定、U 検定は、以前の稿で解説したこともあり (大垣 2000)、また 2 要因のケースは 3 要因以上の場合の特殊例として考えることができるので、ここで 3 要因以上の一元配置と二元配置について取り上げる。

## 1. 一元配置分散分析 (1-way ANOVA)

### ① parametrics 型

2 群以上を対象とする一元配置分散分析は、各要因の標本群の平均値が ‘全体として’ 異なっているか (大きくばらついているか) どうかを調べるための手法である。このことは、各群の平均値間の分散を、群内の標本値の分散 (「誤差」と呼ばれる)

と比較することによって行われる。もし群内のばらつきに対して群間のばらつきが十分大きければ、各群の間に差があると判定するわけである。この場合、2群であればA群とB群のどちらが大きいかという比較であって明快だが、3群以上では、全体としての傾向はわかっても、そのうちのどこに大きなちがいがあって全体のばらつきが実現しているのかは、この検定そのものからは判断できない。それを知るためには、後述する「多重比較」によらねばならない。

一元配置分散分析の基本となるデータ配置は、図2のようなものである。ここでは3群の場合を例とする。海岸での具体

例を想定してみると、たとえばA, B, Cの3地点に、各l, m, n個のコドラートを置き、ある種のウニの個体数を数えて3地点で密度平均に差があるかどうかを調べるといような場合。あるいはA, Bにそれぞれ別の種の貝を導入し、Cをコントロールとして海藻の繁茂状態を比較する、などが考えられる。

	要因 (群)		
	A	B	C
標本値	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>	c <sub>1</sub>
	a <sub>2</sub>	b <sub>2</sub>	c <sub>2</sub>
	:	:	:
	a <sub>l</sub>	b <sub>m</sub>	c <sub>n</sub>
平均	a	b	c
標本数	l	m	n

この表の群平均 a, b, c のばらつきを調べるのが目的だが、その前に

parametrics 検定の前提として、各群の分散の相等性を検定する。この

表2. 1-way ANOVA のデータ配置

ための方法としてはいくつかあるが、そのうち最もよく使われている Bartlett-test の検定原理は、次のようなものである。これは総標本数、要因数、各要因の標本数、各要因内分散をもとに、分散の偏り度 B と補正係数 C を計算し (具体的な式はテキスト類を参照)、B/C が、自由度 k-1 の  $\chi^2$  分布に従うことをもとに、求める有意水準のもとでの  $\chi^2$  値を参照して、分散のばらつきの程度を評価する。しかしこの方法はやや厳しすぎ、のちの平均値差の検定に影響を及ぼさない程度の差まで検出してしまうことがあるという (Sokal & Rohlf 1981, Underwood 1997)。このため他にも Hartley, Scheffe, Leven, Cochran の方法などがあるが、いずれも一長一短のようである。

有意差があった場合、データを対数や平方根で変換して再度試み、それで分散差が消えれば、変換値をもとに以下の手順に進むことができるということは、t 検定の場合と同じである (大垣 2000)。分散に有意差が検出されなければ、続いて平均値差の検定を行う。

平均値差の検定のためには、次のような指標値を求める (M は全標本平均値)。

$$\begin{aligned} \text{全体偏差平方和 (S}_T\text{)} &= \Sigma (M - a_i)^2 + \Sigma (M - b_i)^2 + \Sigma (M - c_i)^2 \\ \text{群間、平均偏差平方和 (S}_C\text{)} &= l(M - a)^2 + m(M - b)^2 + n(M - c)^2 \\ \text{群内、偏差平方和 (S}_R\text{)} &= \Sigma (a - a_i)^2 + \Sigma (b - b_i)^2 + \Sigma (c - c_i)^2 \end{aligned}$$

S (summation,和) の下付きの T, C, R は、それぞれ Total, Column (列), Row (行) を表わす (以下同様)。なお  $S_C$  の場合、平方和にデータ数 (l, m, n) が掛けられているのは、理論上平均値の分散はナマの標本値の分散に比べて、データ数で割った値に縮小しているため、これを補正して比較可能にする意味である。求めた  $S_T, S_C, S_R$  には、 $S_T = S_C + S_R$  という恒等式が成り立つことを、代数計算によって示すことができる。

ここで  $S_R$  (群内偏差平方和) を残差とか誤差と呼ぶことがあるが、私はこの言葉に長い間違和感を持っていて、それが ANOVA 理解の一つのネックになっていた。これらの用語が使われる背景は、たぶん次のようなことであろう。まず「残差」であるが、先の  $S_T = S_C + S_R$  の式において、この3つはそれぞれ別々に元のデータから求めることもできるが、簡便法としては、 $S_T$  と  $S_C$  を計算したあと、 $S_R = S_T - S_C$  つまり全体から群間差を除いた残り (残差) としてもよい。さらに二元配置以上の、より複雑な手法では、 $S_R$  から引くものが2つ以上になってくるので、残差という用語がよりぴたりする。もう一つの「誤差」というのは、室内の生理実験などに由来する言葉であろう。表2の A, B, C の要因が何らかの薬剤処理などで、標本群が実験個体の反応値であるような場合、薬剤の効果以外の、群内各個体が示すばらつきを、本来の値からのずれという意味で誤差と呼ぶのは理解できる。しかし A, B, C が海岸の異なる地点を表わし、標本値がそこでのウニのサイズといった設定で、ウニサイズのばらつきを誤差と呼ぶのは抵抗がある。また、A, B, C を「処理」と呼ぶことがあるが、これも薬剤処理などを念頭に置いた表現であって、「操作」くらいならともかく、一般にフィールドワークの現場にはなじまない。こうした用語の使い方に、分散分析がどういう分野で使われてきた手法かということが伺われるであろう。

いずれにせよ  $S_C, S_R$  が求まると、これをそれぞれの自由度である  $k-1, (l-1) + (m-1) + (n-1)$  で割って  $V_T$  (全体分散),  $V_C$  (群間分散),  $V_R$  (群内分散) が決まる。そして  $F_{cal} = V_C / V_R$  を計算し ( $F_{cal}$  は calculated F、つまり F の計算値のこと、以下同様)、問題となる有意水準、自由度 ( $l+m+n-3, k-1$ ) における F 値との比較を行う。分散比較がこの検定の根幹であるから「分散分析」と呼ばれるわけである。 $F_{cal} > F$  ならば分散比は有意、つまり群内分散に比べて群間分散が十分に大きい (群間平均値に有意差あり) と判定する。以上の結果を、次のような分散分析表にまとめることができる。こうした表は 80 年代、分散分析が使われ始めたころにはよく見かけたが、最近の文献ではあまり仰々しく出さず、 $F_{cal}$  と有意水準くらいで簡単に済ませることが多い。

	平方和 (SS)	自由度 (df)	分散 (MS)	分散比 (F)	P
全体	$S_T$	$l + m + n - 1$			
群間 (処理)	$S_C$	$k - 1$	$V_C$	$V_C / V_R$	0.002 など
群内 (残差)	$S_R$	$l + m + n - 3$	$V_R$		

表 3. 1-way ANOVA の結果表

平方和を SS とするのは Summation of Squares の略。また分散を MS と書くが、これは Mean of Squares の略で、平方和平均値=分散、であることによっている。

ここで、構造モデル（線形モデル）と呼ばれるものにふれておく。統計の教科書では、一元配置分散分析のモデルとして、

$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \quad (i, j \text{ は } i \text{ 行 } j \text{ 列の意味})$$

というような式が出ていることがある。ここで  $x_{ij}$  は表中の各標本値、 $\mu$  は全体平均、 $\alpha_j$  は第  $j$  群平均値の全体平均からのずれ、 $\varepsilon_{ij}$  は誤差、つまり個々の値の、所属群平均値  $\alpha_j$  からのズレを表わす。この式は一見わけがわからないが、言っていることは比較的単純である。つまり

（個々の標本値）=（全体平均）+（群平均の、全体平均からのズレ）+（個々の値の、群平均からのズレ）

という事実を表わす。全体平均から出発して、列平均、行平均と辿り、最後に群内のばらつきを加えて個々の値に至る、というイメージである。第二部で取り上げる、parametrics 型検定の前提条件である母集団の正規分布性とは、この最後の項  $\varepsilon_{ij}$  についての制限であると言える。

なお、一元配置分散分析で、要因（群）が二つの場合、これを上記の手順にのせると  $F_{cal} = V_c/V_R$  を F 分布で検定することになるが、F の平方根は定義上 t 検定の t に一致する。つまり  $F_{cal}$  を F 分布で検定するのは  $t_{cal}$  を t 分布で検定するのに等しく、これが「t 検定は 1-way ANOVA の、2 群における特別な場合にあたる」ということの数学的根拠である。

## ② Kruskal-Wallis 法

1-way ANOVA において母集団の正規分布、各群間等分散が前提にできない時、その nonparametrics 対応手法として Kruskal-Wallis 法がある。これは 2 群の差を検定する nonparametrics 手法である U 検定を、3 群以上に拡張した方法と言うこともできる。この方法では、まず全群のデータをまとめて各標本値に通し順位をつけ、群ごとの順位合計を求める。そしてそれを元に次の統計量 H を計算する。

$$H_{cal} = \{12 / N(N+1)\} \sum \{R_i^2 / n_i - 3(N+1)\}$$

ただし、N は総データ数、k は群数（要因数）、 $R_i$  は  $i$  群の順位合計、 $n_i$  は  $i$  群のデータ数である。これを表 2 のデータに適用すると、

$$H_{cal} = \{12 / (1+m+n)(1+m+n+1)\} \times (R_A^2 + R_B^2 + R_C^2)$$

そして H が自由度  $k-1$  の  $\chi^2$  分布に従うことから、ある有意水準での  $\chi^2$  値を表から求め、 $H_{cal}$  がそれより大きければ群間の差を検出したことになる。ただし  $k=3$  かつ  $N < 18$  の少数群、小標本の場合は  $\chi^2$  分布への適合が良くないので、Kruskal-Wallis 検定表を用いる。

なお、上の H の定義式で、 $12 / N(N+1)$  と  $-3(N+1)$  は、 $\chi^2$  分布への適合をよくするための補正項で、指標値の本体は  $\sum R_i^2 / n_i$  である。この値は、3 群の順位が均一

に混じり合っている時より、分離している時のほうが大きくなる。これは、2乗することによって高順位の値の影響が強くなって、標本値が各群に均一に分布している時よりもHの値が大きくなるためである。

### ③ 多重比較

以上述べて来た一元配置の分散分析において、全体として群間の有意差があると認められた場合、どの要因間ないし要因群間に有意な断絶があるかを検出する手法として、多重比較がある。この操作は、事柄の性質からして先に述べた固定型 (Model I) の変数 (要因) に対してのみ意味を持つ。群間の差を調べる場合、まず頭に浮かぶのは、挙げられている要因の中からどれか2つを取り上げてt検定を行い、これをくり返して、すべての要因間について有意差の星取表のようなものを作るやり方であろう。しかしこれは正しくないとされる。その理由は、たとえば危険率  $P=0.05$  であれば、このようにして得られた有意差のうち、20に1つは、実際には差がないにもかかわらず、誤って「差あり」と判断していることになるからである。ただこの場合、はじめから  $\mu_1 = \mu_2 > \mu_3$  ( $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  は各群の平均値) というような限定的な仮説を立て (a priori と呼ばれる)、それだけしか調べないのなら問題はない。しかし全体の差を検出したあと引き続き差の所在を探索する、というような手続き (a posteriori) においては、上記の配慮が必要になる。具体的には、2要因間の検定を積み重ねて行く場合に比べ、より厳しい基準で検定しなければならないということである。多重比較の手法としてかつてよく使われた Duncan の Multiple Range Test は、この点がコントロールされておらず誤りとされる。それに代わる妥当な手法として、現在では Tukey Test, SNK Test (Student Newman Keuls Test または Newman Keuls Test) がよく用いられている。

#### Tukey Test :

表 2, 3 に示した一元配置のデータと分析結果において、A 群と B 群の差を調べる時には、まず  $SE = \sqrt{(V_R / n)}$  を計算する。ただし  $n$  は群内標本数で、A 群と B 群の標本数が等しい時は  $l = m = n$  でよいが、等しくない時は  $1/n$  の代わりに  $1/2(1/l + 1/m)$  を用いる ( $l, m$  は A, B 群の標本数)。次いで  $q = (a - b) / SE$  ( $a, b$  は A, B 群の平均値) を計算し、求める危険率、誤差自由度 ( $l + m + n - 3$ )、群数 (この場合は 3) をもとに  $q$  検定表を引く。そして  $q_{cal} > q$  なら A, B 群間に有意差ありと判定する。この  $q$  の式は  $t$  検定の  $t$  の式に似ているが、実際に  $t$  検定よりも厳しい基準になっているかどうか、 $q$  検定表の作り方がわからないので私には判断できない。しかし理屈上はそうなっているはずである。なお、 $q$  値が比較 2 群の標本数のみならず、全群標本数に依存して決められるところに、この検定が単に 2 群比較ではなく全体を視野に入れた検定であることが現れていると言えよう。

$q$  値による比較は必ずしもすべての群間で行う必要はなく、たとえば平均値が大きい順に A, B, C と並んだとすると、B-C 間に有意差があれば、A-C 間は検定するまでもなく有意差ありと判断する。つづいて A-B 間を検定して有意差が認められなければ、以下のように下線をつけて、群間のまとまりが表現される。この場合、AB 間の差は非有意、AB と C 間には有意差ありという関係を表わしている。

群 (要因)	A	B	C
平均値	a	b	c

#### SNK Test :

この検定の手順はほとんど Tukey Test と同じで、q 表を用いる点も変わらない。ただ、q<sub>cal</sub> を求めて表を引く時、群数のかわりに平均値の離間度（隣りどうしなら 1、3 つ離れていれば 3 など）を用い、それに応じて異なる q 値を使う。その結果、Tukey Test よりも有意差が出やすくなる。

#### Nonparametric Multiple Comparison :

一元配置の分析において nonparametrics の Kruskal Wallis 法を用いて群間の有意差を検出し、多重比較に進む場合、いわば Tukey Test の nonparametrics 対応手法と言うべきものも考えられている。この方法では、まず全群の標本値をプールして共通順位をつけ、再び各群に戻してグループごとの平均順位  $r_A, r_B, r_C$  を求める。A 群と B 群の比較であれば、次に  $SE = \sqrt{\{N(N+1)/12 \times (1/l+1/m)\}}$  を計算し、平均順位差をこの SE で割って、 $Q_{AB} = (r_A - r_B) / SE$  とする。この  $Q_{AB}$  に対し、求める危険率、群数（ここでは 3）のもとでの Q 値を Q 表から引き、 $Q_{AB} > Q$  ならば AB 間に有意差ありと判定する。AC, BC 間についても同様である。もしも、群数として固定値ではなく離間差を用いれば、SNK Test 対応の nonparametrics 多重比較となる。

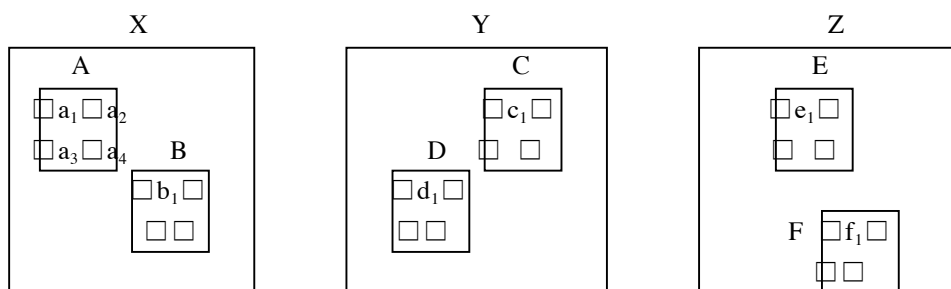
## 2. 入れ子型配置 (Nested ANOVA)

一元配置のバリエーションとして、各要因（グループ）内にいくつかのサブグループがあり、そのサブグループ内に複数の標本値が含まれているという場合、入れ子型 (nested) 配置と呼ばれる。英語の nest は「巣を作る」という意味だから、巣（要因グループ）の中に卵（サブグループ）が入っているというイメージであろうか。このタイプでは、サブグループ内の標本値のばらつきをもとにサブグループ間の差を、サブグループ間のばらつきをもとにグループ間の差を評価することができる。また同時に、全体的な標本値のばらつきに対し、グループ、サブグループ、誤差の各レベルが寄与する割合を計算することもできる。入れ子は何段階あってもよく、サブグループの下にサブサブグループ、サブサブサブ…などのケースもありうる。サブグループ以下の要因は、それをもとに上位要因の差を検定するので必ず無作為型でなければならない。しかし最上位のグループ要因は、固定型と無作為型があり、前者であれば mixed model、後者なら pure model となって、検定方法がやや異なる。ここでは 2 段階入れ子構造の mixed model を取り上げる。Nested Anova の出発点となるデータ配置は、表 4 のようなものである。表では二段階入れ子構造で 3 グループ、2 サブグループ、各サブグループ内 4 標本とした。変数の多用を避けるため、以下の計算例では自由度の計算などにおいて、これらの具体的な数値を用いる。なお、標本値は、各サブグループ間で不等でも検定可能だが、やっかいな問題があって検定が不正確になるとされるので、ここでは 4 に統一した。

グループ要因	X		Y		Z	
サブグループ要因	A	B	C	D	E	F
標本値	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$
	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$d_2$	$e_2$	$f_2$
	$a_3$	$b_3$	$c_3$	$d_3$	$e_3$	$f_3$
	$a_4$	$b_4$	$c_4$	$d_4$	$e_4$	$f_4$

表 4. Nested Anova のデータ配置

なお、Nested Anova は、海岸生態学においては、種の分布パターンの分析に使われることがある。表 4 の例なら、たとえばある種のウニの分布を、下図のようなコードラート配置によって調べるといった操作に相当する。この場合の標本数は最小コードラ



ト内での個体数を示す。XYZ…、ABC…、abc…の3つのスケールでコードラートを設定すれば、検定によってスケール間での密度のばらつきのちがいを調べることができる。たとえば、細かいスケールでは一樣だが、大きく取るとばらつくとか、細かいスケールではばらついているが、ある程度広く取ると一樣化される、などである。場合によっては、XYZ を無作為化してさらに上の階層を設け、平面スケールをさらに多段階に設定することもできる。

表 4 に戻り、具体的検定手順としては、まず以下に示すような様々な平方和を求める。(これ以降、平方和の式は煩雑になるので、具体的には示さず、略記号を用いる。詳細はテキスト類を参照。)

全体偏差平方和	$SS_T$
グループ間偏差平方和	$SS_H$
サブグループ間偏差平方和	$SS_L$
サブグループ内偏差平方和	$SS_E$

(T, total; H, high level; L, low level; E, error の意味)

これらの間には  $SS_T = SS_H + SS_L + SS_E$  の関係がある。分散分析表は以下のようになる。



	平方和 (SS)	自由度 (df)	分散 (MS)	分散比 (Fcal)
グループ間	$SS_H$	3-1	$SS_H / 2 = V_H$	$V_H / V_L$
サブグループ間	$SS_L$	$3 \times (2-1)$	$SS_L / 3 = V_L$	$V_L / V_E$
グループ内 (誤差)	$SS_E$	$3 \times 2 \times (4-1)$	$SS_E / 18 = V_E$	

表 5. Nested ANOVA の結果表

以上に基づき、グループ間の差であれば求める危険率と示された自由度のもとでの F 値を F 分布表から求め、 $F_{cal} > F$  ならばサブグループ間分散に照らしてグループ間分散が有意に大きいと認める。サブグループ間分散はグループ内分散 (誤差) と比較して、同様に判定することができる。なお表 5 から以下の指標値、

$$S^2_E = V_E$$

$$S^2_L = (V_L - V_E) / 4 \quad (4 \text{ は各サブグループ内標本数})$$

$$S^2_H = (V_H - V_L) / (4 \times 2) \quad (2 \text{ は各グループ内サブグループ数})$$

を計算し、各  $S^2$  値の全体に対する割合、たとえば  $S^2_E / (S^2_E + S^2_L + S^2_H)$  によって、グループ要因、サブグループ要因、誤差の、全体標本分散に対する寄与率を計算することができる。先のウニの例では、どの空間スケールでどの程度のばらつきが担われているかを知ることができる。

Nested ANOVA の理論を、構造モデルで表わすと次のようになる。

$$\chi_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ここで  $\chi_{ijk}$  は第  $i$  グループ内第  $j$  サブグループ内  $k$  番目の値を表わし、 $\mu$  は全体平均、 $\alpha_i$  は第  $i$  グループ平均値の全グループ平均からのズレ、 $\beta_{ij}$  は  $i$  番グループ内第  $j$  サブグループの  $i$  番グループ内全サブグループ平均からのズレ、 $\varepsilon_{ijk}$  は標本値の、サブグループ平均からのズレであると同時に、 $\mu, \alpha, \beta$  を差し引いた、各標本値の誤差を示す。つまり、

(標本値) = (全体平均) + (所属上位グループの全グループ平均からのズレ) + (所属下位グループの、全サブグループ平均からのズレ) + (標本値のサブグループ平均からのズレ=誤差) となる。

### 3. 二元配置 2-way ANOVA

これまでは検討する要因のシリーズが一つのを扱ったが、要因シリーズが 2 つあり、2 次元的に配列されているタイプを二元配置と呼ぶ。たとえば行要因を海岸の各レベル、列要因を実験操作の種類などとして、それに応じた何かの種の成長量を見

る、といったデザインを考えることができる。このとき、行要因と列要因がクロスした枠内に、データが1つずつであるものを「くり返しのない二元配置」、複数あるものを「くり返しのある二元配置」と言う。このうち前者を海岸生態の文献で目にすることはまれだが、それは一つには、昨今の風潮は replicate を取るのが主流であり、1条件1標本という設定を嫌うということがあろう。第二に、くり返しなし配置は、誤差分散の中に交互作用と本来の誤差が混在して分離できず、交互作用がないとみなせる場合だけ正確な検定ができるという、いわば手法としての弱さがある。第三に、くり返し配置を用いると、要因交互作用が検出できるというメリットがある。交互作用とは先の例で言えば、特定の高さに特定の操作を施した時に特に強い影響があるかどうか、といったようなことである。また、説明上は、くり返しなし配置はくり返しのある場合の単純なケースに当るので、後者を説明すれば足りるという面もある。したがってここではくり返し配置のみを解説する。

各条件内の replicate の数については、同数でなくても検定は可能だが、等しいほうが差の検出力が上がるので、そちらが推奨されている。また、要因の固定型と無作為型という点からいうと、行と列の2要因シリーズがある場合、固×固、固×無、無×固、無×無の4つの組み合わせが考えられ、それぞれ最終的なF検定に用いる分散比の取り方が異なる。ここでは等しい replicate、固定型×固定型に限って述べる。

	A	B	C	D
P	$\chi_{AP1}$	$\chi_{BP1}$	$\chi_{CP1}$	$\chi_{DP1}$
	$\chi_{AP2}$	$\chi_{BP2}$	$\chi_{CP2}$	$\chi_{DP2}$
Q	$\chi_{AQ1}$	$\chi_{BQ1}$	$\chi_{CQ1}$	$\chi_{DQ1}$
	$\chi_{AQ2}$	$\chi_{BQ2}$	$\chi_{CQ2}$	$\chi_{DQ2}$
R	$\chi_{AR1}$	$\chi_{BR1}$	$\chi_{CR1}$	$\chi_{DR1}$
	$\chi_{AR2}$	$\chi_{BR2}$	$\chi_{CR2}$	$\chi_{DR2}$

表6. くり返し二元配置のデータ配列。A, B, C, Dは列要因、P, Q, Rは行要因。

等 replicate、固定型×固定型の2-way Anovaの出発点となるデータ配置は表6のようなものである。ここでは行要因3、列要因4、レプリケート2の場合を示した。未知数の多用を避けるため、以下の自由度の表示などに当っては、これらの具体的数値を用いる。この表をもとに、以下の平方和を計算する。

全体偏差平方和	$S_T$
行要因偏差平方和	$S_R$
列要因偏差平方和	$S_C$
行要因×列要因、群間偏差平方和	$S_{RC}$
誤差	$S_E$
交互作用偏差平方和	$S_{R \times C} = S_{RC} - S_R - S_C$

これまではそれぞれの指標値の数式も表示して来たが、ここではかなり複雑化するため、内容を用語で説明するに止めた（詳細はテキスト類を参照のこと）。ここで、

$$S_T = S_R + S_C + S_{R \times C} + S_E \quad \text{つまり、}$$

$$(\text{全体分散}) = (\text{行分散}) + (\text{列分散}) + (\text{交互作用分散}) + (\text{誤差})$$

以上をもとに、分散分析表は、

	平方和 (SS)	自由度 (df)	分散 (MS)	分散比 (Fcal)
全体	$S_T$	$2 \times 3 \times 4 - 1$		
行要因	$S_R$	$3 - 1$	$V_R = S_R / 2$	$V_R / V_E$
列要因	$S_C$	$4 - 1$	$V_C = S_C / 3$	$V_C / V_E$
行×列	$S_{RC}$	$3 \times 4 - 1$		
交互作用	$S_{R \times C}$	$(3 - 1) \times (4 - 1)$	$V_{R \times C} = S_{R \times C} / 6$	$V_{R \times C} / V_E$
誤差	$S_E$	$3 \times 4 \times (2 - 1)$	$V_E = S_E / 12$	

表 7. くり返し配置 2-way ANOVA の分析表。

この右端の分散比を、求める危険率と自由度における F 値と比較して有意性を検定する。その結果、行要因、列要因間で差があるかどうか、また交互作用が認められるかどうか判定される。

二元配置分散分析の構造モデルは、

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon \quad \text{つまり、}$$

(i 行 j 列 k 番の標本値) = (全体平均) + (枠内平均の行平均からのズレ) + (枠内平均の、列平均からのズレ) + (枠内平均の、交互作用によるズレ) + (個々の値の、枠内平均からのズレ)

となる。3 元配置以上でも、基本的には 2 元配置と同じでその拡張だが、計算は極めて複雑化する。パソコンでソフトを利用して計算する分には関係ないとも言えるが、固定型と無作為型の組合せなどの理論的検討となると容易でない。潮間帯生態学の論文では、三元以上の解析例も多く、分散分析表で Time×Height×Treatment などの項目があれば、これはくり返しのある 3 元配置 (以上) で分析し、交互作用について検討したことを意味する。

2-way ANOVA 以上に対応する nonparametrics 手法としては、くり返しのない二元配置について Friedman の検定があるが、くり返し二元配置と三元配置以上については、通常の教科書類には解説されていない。

(つづく ; 文献は第二部末に一括)